**2.2** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & m\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & m^2\end{pmatrix},$$

donde $m$ es un parámetro real, se pide:

2.2.1 **(0.5 puntos)** Calcular el producto $AB$ y la matriz traspuesta de $AB$.

2.2.2 **(0.75 puntos)** En los casos en los que $A$ es invertible, calcular la inversa de $A$.

2.2.3 **(0.75 puntos)** Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

*Solución:*

*2.2.1 Calcular AB y la matriz traspuesta de AB.*

$$A\,B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 2\cdot 2+3\cdot 5\\ 1\cdot(-1)+m\cdot 1 & 1\cdot 2+m\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 19\\ m-1 & 5m+2\end{pmatrix}$$

$$(A\,B)^t=\begin{pmatrix}1 & m-1\\ 19 & 5m+2\end{pmatrix}$$

***Solución:***

$$A\,B=\begin{pmatrix}1 & 19\\ m-1 & 5m+2\end{pmatrix}$$

$$(A\,B)^t=\begin{pmatrix}1 & m-1\\ 19 & 5m+2\end{pmatrix}$$

*2.2.2 En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A.*

*A es invertible si* $|A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & m\end{vmatrix}=2m-3;\quad 2m-3=0;\quad 2m=3;\quad m=\frac{3}{2}$$

$$Si\quad m\neq\frac{3}{2}\quad \exists\, A^{-1}$$

*Cálculo de* $A^{-1}$:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & m\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}m & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}m & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}m & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

*Finalmente,* $$(A)^{-1}=\frac{1}{2m-3}\begin{pmatrix}m & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3}\\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3}\end{pmatrix}$$

***Solución:*** $$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3}\\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3}\end{pmatrix}\quad cuando\ m\neq\frac{3}{2}.$$

*2.2.3) Resolver la ecuación matricial* $BX + A^2 = C$

*Despejemos* $X$:

$B\,X = C - A^2$; *si* $\exists\, B^{-1}$, *multiplicando por* $B^{-1}$ *por la izquierda:* $B^{-1}\,B\,X = B^{-1}\,(C - A^2)$;

$I\,X = B^{-1}\,(C - A^2)$; $X = B^{-1}\,(C - A^2)$.

*Veamos si existe* $B^{-1}$,

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, B^{-1}$$

*Cálculo de* $B^{-1}$:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*Cálculo de* $A^2$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot 3 + 3\cdot m \\ 1\cdot 2 + m\cdot 1 & 1\cdot 3 + m\cdot m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6+3m \\ 2+m & 3+m^2 \end{pmatrix}$$

*Cálculo de* $C - A^2$,

$$C - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6+3m \\ 2+m & 3+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix}$$

*Cálculo de* $X$,

$$X = B^{-1}(C - A^2) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -7-3m \\ 3-m & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5\cdot(-7) + 2\cdot(3-m) & -5\cdot(-7-3m) + 2\cdot(-3) \\ 1\cdot(-7) + 1\cdot(3-m) & 1\cdot(-7-3m) + 1\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 35+6-2m & 35+15m-6 \\ -7+3-m & -7-3m-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 41-2m & 29+15m \\ -4-m & -10-3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{41-2m}{7} & \dfrac{29+15m}{7} \\ \dfrac{-4-m}{7} & \dfrac{-10-3m}{7} \end{pmatrix}$$

***Solución:*** $X = \begin{pmatrix} \dfrac{41-2m}{7} & \dfrac{29+15m}{7} \\ \dfrac{-4-m}{7} & \dfrac{-10-3m}{7} \end{pmatrix}$.