3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2\ x + a\ y - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.1 **(0.75 puntos)** Calcular la distancia entre el punto (3, 1, – 2) y el plano π, en función del parámetro real a.

3.1.2 **(0.75 puntos)** Para a = 4, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π.

3.1.3 **(1 punto)** Para a = 3, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π.

Solución:

3.1.1 Calcular la distancia entre el punto P (3, 1, – 2) y el plano π, en función del parámetro real a.

$$d(P,\pi) = \frac{|2\cdot 3 + a\cdot 1 - (-2) + 3|}{\sqrt{2^2 + a^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 + a + 2 + 3|}{\sqrt{5 + a^2}} = \frac{|11 + a|}{\sqrt{5 + a^2}}$$

La distancia del punto (3, 1, – 2) al plano π es $\frac{|11 + a|}{\sqrt{5 + a^2}}$.

3.1.2 Para a = 4, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π.

Debemos obtener el vector normal del plano

Si a = 4, $\pi: 2x + 4y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi(2, 4, -1)$.

y el vector director de la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 21\,\vec{i} - 9\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

Luego $\vec{v}_r = (21, -9, 6)$

Siendo $\hat{\beta} = \left(\widehat{\vec{v}_r, \vec{n}_\pi}\right) \rightarrow \left(\widehat{\vec{r}, \vec{\pi}}\right) = 90^\circ - \left(\widehat{\vec{v}_r, \vec{n}_\pi}\right)$

$$\cos\hat{\beta} = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi\right|}{\left|\vec{v}_r\right| \cdot \left|\vec{n}_\pi\right|} = \frac{|(21, -9, 6)(2, 4, -1)|}{\sqrt{21^2 + (-9)^2 + 6^2}\ \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{|42 - 36 - 6|}{\sqrt{558}\ \sqrt{21}} = \frac{|0|}{\sqrt{558}\ \sqrt{21}} = 0$$

$$\cos\hat{\beta} = 0 \rightarrow \hat{\beta} = 90^\circ \rightarrow \left(\widehat{\vec{r}, \vec{\pi}}\right) = 90^\circ - 90^\circ = 0$$

Solución: la recta r con el plano π forman un ángulo de 0º.

3.1.3 Para $a = 3$, simétrico del punto $P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π.

Si $a = 3$, $\pi: 2x + 3y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi(2, 3, -1)$.

El proceso para el cálculo del simétrico es:

1º) Recta, s, que pasa por P y es perpendicular a π.

De la recta s conocemos: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) \\ \text{v. director, } s \perp \pi \rightarrow \vec{v}_s = \vec{n}_\pi(2,3,-1) \end{array} \right.$

Las ecuación paramétrica de s, $s: \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

2º) Punto de corte entre s y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$$2\left(\frac{9}{2} + 2\lambda\right) + 3(5 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + 3 = 0; \quad 9 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + 1 + \lambda + 3 = 0; \quad 14\lambda + 28 = 0;$$

$$14\lambda = -28; \quad \lambda = \frac{-28}{14} = -2$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta r: $\begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2(-2) = \frac{1}{2} \\ y = 5 + 3(-2) = -1 \\ z = -1 - (-2) = 1 \end{cases}$

Entonces $M\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$.

3º) P´ será tal que $\frac{P + P'}{2} = M$.

$$P + P' = 2M \rightarrow P' = 2M - P = 2\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) = (1, -2, 2) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) =$$

$$= \left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$$

***Solución:** $P'\left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$.*