**4.1** Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 $cm^2$. Se pide:

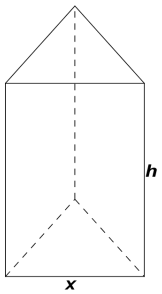
4.1.1 **(0.5 puntos)** Expresar el área total del prisma en función de $x$ y $h$.

4.1.2 **(1.5 puntos)** Obtener los valores de $x$ y $h$ que maximizan el volumen.

4.1.3 **(0.5 puntos)** Hallar dicho volumen.

*Solución:*

*El prisma triangular es:*

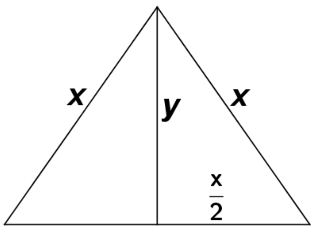



*de 10 $cm^2$ de área total.*

*El área lateral y el volumen del prisma:* $A_T = A_L + 2 \cdot A_{base} = 3x\,h + 2A_{base}$ y $V = A_{base} \cdot h$

*4.1.1 Expresar el área total del prisma en función de x y h.*

*Calculemos el área de la base del prisma. Las bases de este prisma, según enunciado, son triángulos equiláteros:*




$A_{base} = \dfrac{x\,y}{2}$, *obtengamos y en función de x.*

*En el triángulo rectángulo, aplicando Teorema de Pitágoras:*

$$x^2 = y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2; \quad x^2 = y^2 + \frac{x^2}{4}; \quad y^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}; \quad y^2 = \frac{3x^2}{4};$$

*x e y son longitudes, por tanto son positivas,*

$$y = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad A_{base} = \frac{x\frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

*Luego,* $A_T = 3x\,h + 2\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3x\,h + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}$

***Solución: el área total del prisma en función de x y h es:*** $A_T = 3x\,h + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} \quad x, h > 0$.

*4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.*

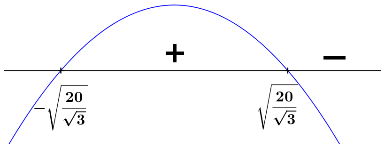
*El volumen del prisma es:* $V = A_{base} \cdot h = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}h$. *Como en esta expresión tenemos dos variables hay que buscar una relación entre ellas. Sabemos que el área total es 10 $cm^2$.*

$$3x\,h + \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 10, \text{ despejemos } h: \quad 3x\,h = 10 - \frac{x^2\sqrt{3}}{2}; \quad 3x\,h = \frac{20 - x^2\sqrt{3}}{2}; \quad h = \frac{\frac{20 - x^2\sqrt{3}}{2}}{3x} = \frac{20 - x^2\sqrt{3}}{6x}$$

*Como x, h > 0 obtengamos los posibles valores de x, debe ser* $20 - x^2\sqrt{3} > 0$

$20 - x^2\sqrt{3} = 0; \quad x^2\sqrt{3} = 20; \quad x^2 = \dfrac{20}{\sqrt{3}}; \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{20}{\sqrt{3}}}$. *La inecuación de 2º grado tiene coeficiente de $x^2$*

*negativo, gráficamente*




*Y como* $x > 0 \;\rightarrow\; x \in \left(0, \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}\right) \cong (0, 3'3981)$

*Por tanto,* $V(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\;\dfrac{20 - x^2\sqrt{3}}{6x} = \dfrac{x^2\sqrt{3}\left(20 - x^2\sqrt{3}\right)}{24x} = \dfrac{x\sqrt{3}\left(20 - x^2\sqrt{3}\right)}{24} = \dfrac{x\sqrt{3}\left(20 - x^2\sqrt{3}\right)}{24} =$

$$= \frac{20\sqrt{3}\;x - 3x^3}{24} \qquad x \in \left(0, \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}\right) \cong (0, 3'3981)$$

*Debemos calcular el máximo de V(x)*

$$V'(x) = \frac{20\sqrt{3} - 9x^2}{24};\quad V'(x) = 0;\quad \frac{20\sqrt{3} - 9x^2}{24} = 0;\quad 20\sqrt{3} - 9x^2 = 0;\quad 20\sqrt{3} = 9x^2;\quad x^2 = \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

*como* $x > 0,\quad x = \sqrt{\dfrac{20\sqrt{3}}{9}} \cong 1'9619 \in \left(0, \sqrt{\dfrac{20}{\sqrt{3}}}\right)$

$V''(x) = \dfrac{-18x}{24}$ *y* $V''\left(\sqrt{\dfrac{20\sqrt{3}}{9}}\right) < 0 \;\rightarrow\;$ *en* $x = \sqrt{\dfrac{20\sqrt{3}}{9}}$ *hay un máximo relativo.*

*V(x) sólo tiene este máximo relativo que será el absoluto ya que a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

*Para*

$$x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}},\quad h = \frac{20 - \left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right)^2\sqrt{3}}{6\left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right)} = \frac{20 - \frac{20\sqrt{3}}{9}\sqrt{3}}{6\,\frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}} = \frac{20 - \frac{20\cdot 3}{9}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{20 - \frac{20}{3}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{\frac{40}{3}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} \cong 1'1327$$

***Los valores que maximizan el volumen son   x = 1´9619 cm   y   h = 1´1327 cm.***

*4.1.3 Hallar dicho volumen.*

*Calculando el volumen usando el valor aproximado de x:*

$$V(x) = \frac{20\sqrt{3}\;x - 3x^3}{24} \quad\rightarrow\quad V(1'9619) = \frac{20\sqrt{3}\cdot 1'9619 - 3\,(1'9619)^3}{24} \cong 1'8878$$

*Calculando el volumen usando el valor exacto de x:*

$$V(x) = \frac{20\sqrt{3}\;x - 3x^3}{24} \quad\rightarrow\quad V\left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right) = \frac{20\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}} - 3\left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right)^3}{24} \cong 1'8878$$

***Solución: el volumen pedido del prisma es de 1´8878 cm³.***