4.2 Dada la función real de variable real $f(x)=\dfrac{4}{(x-1)^2}+x,$ se pide:

4.2.1 **(0.5 puntos)** Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f.

4.2.2 **(0.75 puntos)** Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

4.2.3 **(0.5 puntos)** Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 **(0.5 puntos)** Calcular la integral indefinida $\int f(x)\, dx$.

Solución:

4.2.1

Dom f(x),

$$(x-1)^2=0;\quad x-1=0;\quad x=1 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{1\}$$

Asíntotas,

verticales,

Posible asíntota vertical $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{(x-1)^2}+x\right)=\frac{4}{0}+1=\infty+1=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \text{ es la asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4}{(x-1)^2}+x\right)=\dfrac{4}{+\infty}+(-\infty)=0-\infty=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{(x-1)^2}+x\right)=\dfrac{4}{+\infty}+(+\infty)=0+\infty=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow \text{ no hay asíntota horizontal.}$$

oblicua,

$$y=mx+n$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{(x-1)^2}+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x\,(x-1)^2}+1\right)=\frac{4}{\infty}+1=0+1=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{(x-1)^2}+x-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{(x-1)^2}\right]=\frac{4}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua es $y = x$

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{1\}$***, su asíntota vertical es x = 1 y su asíntota oblicua y = x.***

4.2.2 Extremos y monotonía de f(x)

Extremos,

$$f'(x)=\frac{-4\cdot 2\,(x-1)}{(x-1)^4}+1=\frac{-8}{(x-1)^3}+1$$

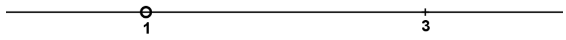
$$f'(x)=0;\quad \frac{-8}{(x-1)^3}+1=0;\quad \frac{-8}{(x-1)^3}=-1;\quad (x-1)^3=8;\quad x-1=\sqrt[3]{8};\quad x-1=2;\quad x=3$$

$$f''(x)=\frac{-(-8)\,3\,(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{24}{(x-1)^4};\quad f''(3)=\frac{24}{(3-1)^4}=\frac{24}{16}>0 \quad\rightarrow\quad \text{en } x=3 \text{ hay mínimo relativo.}$$

Para $x = 3$, $f(3)=\dfrac{4}{(3-1)^2}+3=4 \quad\rightarrow$ *Mínimo relativo de f(x) el punto (3, 4).*

Monotonía,

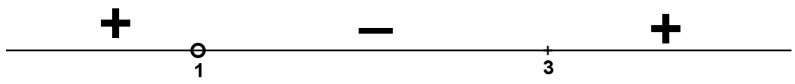
Tenemos que estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos:



$$x=0,\quad f'(0)=\frac{-8}{(0-1)^3}+1=9>0$$

$$x=2,\quad f'(2)=\frac{-8}{(2-1)^3}+1=-7<0$$

$$x=4,\quad f'(4)=\frac{-8}{(4-1)^3}+1=\frac{19}{27}>0$$



luego, f(x) es decreciente en $(1,3)$ *y creciente en* $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

Solución: f(x) tiene un mínimo relativo en el punto (3, 4) y
f(x) es decreciente en $(1,3)$ ***y creciente en*** $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.

4.2.3 Representación gráfica de f(x).

De f(x) conocemos: Dom f(x) = $\Re \sim \{1\}$*, asíntota vertical x = 1, asíntota oblicua y = x, mínimo relativo (3 , 4), creciente en* $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ *y decreciente en* $(1,3)$.

Para representar la función debemos calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$$x=0,\quad f(0)=\frac{4}{(0-1)^2+0}=4\quad\rightarrow\quad(0,4)$$

$$f(x)=0,\quad \frac{4}{(x-1)^2}+x=0;\quad 4+x(x-1)^2=0;\quad 4+x(x^2-2x+1)=0;\quad 4+x^3-2x^2+x=0$$

$$x^3-2x^2+x+4=0$$

Resolviendo esta ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & & -1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & \underline{/0} \end{array}$$

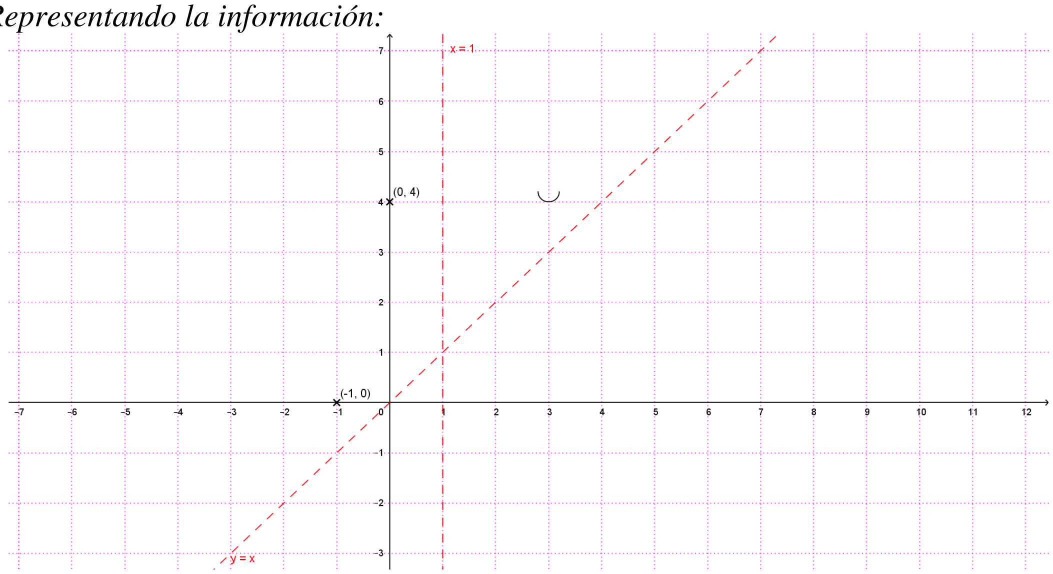
Resolvamos la ecuación de 2º grado que falta,

$$x^2-3x+4=0;\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}\quad \text{sin soluciones.}$$

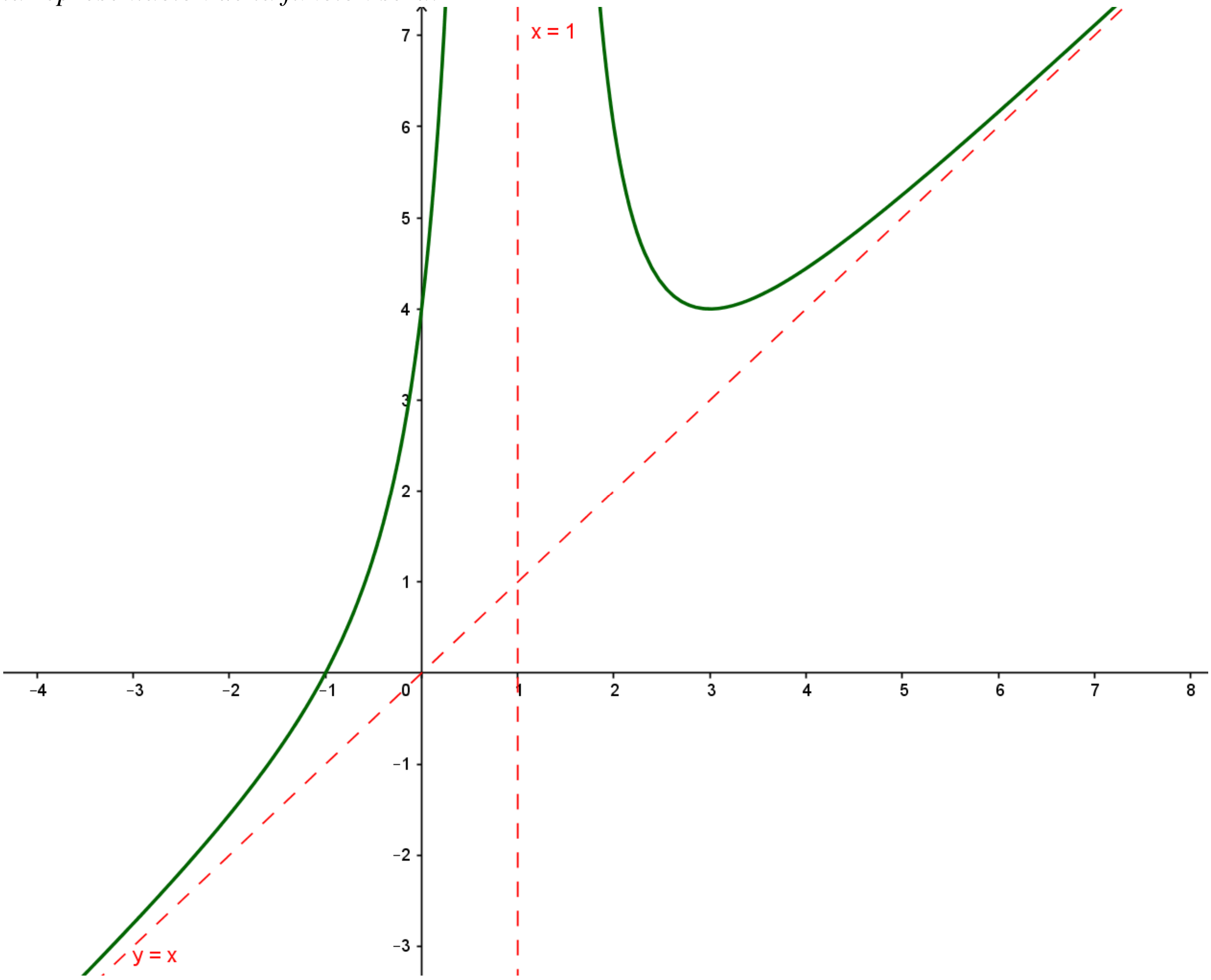
Por lo que, si f(x) = 0, x = – 1

Los puntos de corte con los ejes son: (0 , 4) y (– 1 , 0)

Representando la información:



Y la representación de la función será:



4.2.4 Calcular la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{4}{(x-1)^2}+x\right)dx = \int\frac{4}{(x-1)^2}\,dx + \int x\,dx,$$

$$\int\frac{4}{(x-1)^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix}\right\}\int\frac{4}{t^2}\,dx = \frac{-4}{t} = \frac{-4}{x-1}$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Por lo que $\int f(x)\,dx = \frac{-4}{x-1}+\frac{x^2}{2}+C$