

## 2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

Se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro real  $\alpha$ .

2.1.2 (1.5 puntos) Encontrar la solución del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

2.1.1

La matriz ampliada de este sistema es: 
$$A' = \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 2 \end{array} \right)$$

$A$  es una matriz  $3 \times 3$ , por tanto el máximo rango de  $A$  es 3.  $A'$  es una matriz  $3 \times 4$ , por tanto el máximo rango de  $A'$  es 3.

Empezamos estudiando el rango de  $A$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 1 - 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha - 2$$

$$\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0;$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 0 & -3 & -2 & \\ -1 & & -1 & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 & \\ -1 & & -1 & 2 & & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & & \\ \alpha - 2 = 0 & \rightarrow & \alpha = 2 & & & \end{array} \quad \text{dos soluciones} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Si  $\alpha \neq -1$  y  $2$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ , y como el máximo rango de  $A'$  es 3  $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$  incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si  $\alpha = -1$

$$A' = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que  $|A| = 0$ , estudiemos el rango de  $A$ , como  $F_2 = -F_1$  y  $F_3 = F_1 \rightarrow \text{ran}(A) = 1$ .

En  $A'$ , el menor de orden 2 correspondiente a  $F_1$   $F_2$  y  $C_1$   $C_4$ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Luego,  $\text{ran}(A) = 1 \neq 2 = \text{ran}(A') \rightarrow$  Sistema incompatible

Si  $\alpha = 2$

$$A' = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Sabemos que  $|A| = 0$ , luego  $\text{ran}(A) \leq 2$ .

$$\text{En } A, \text{ el menor de orden } 2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

En  $A'$ , a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 2 - 2 = 5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto,  $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$ , luego el sistema es incompatible.

**Solución, si  $\alpha \neq -1$  y  $2$ , el sistema es compatible determinado;**

**si  $\alpha = -1$  o  $2$ , el sistema es incompatible.**

2.1.2 El sistema es compatible (determinado) para  $\alpha \neq -1$  y  $2$ .

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}$$

$|A| = \alpha^3 - 3\alpha - 2$ ,  $\{\alpha \neq -1 \text{ y } 2 \rightarrow \alpha^3 - 3\alpha - 2 \neq 0\}$ . Considerando las raíces obtenidas de este polinomio  $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = (\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)$ .

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{-1 + 2 + 2\alpha - \alpha}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{(\alpha + 1)}{(\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)} = \frac{1}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha^2 - 2 - 1 - 2\alpha}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \left\{ \begin{array}{c|cc} -1 & 1 & -2 & -3 \\ \hline & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & | 0 \end{array} \right\} = \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)} = \frac{(\alpha - 3)}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{2\alpha^2 - 1 - \alpha - 2}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \frac{2\alpha^2 - \alpha - 3}{\alpha^3 - 3\alpha - 2} = \left\{ \begin{array}{c|cc} -1 & 2 & -1 & -3 \\ \hline & -2 & 3 & \\ \hline & 2 & -3 & | 0 \end{array} \right\} = \frac{(\alpha + 1)(2\alpha - 3)}{(\alpha + 1)^2 (\alpha - 2)} = \frac{(2\alpha - 3)}{(\alpha + 1)(\alpha - 2)}$$

*Si  $\alpha \neq -1$  y  $2$ , la solución es:*

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha-2)} \\ y = \frac{\alpha-3}{(\alpha+1)(\alpha-2)} \\ z = \frac{2\alpha-3}{(\alpha+1)(\alpha-2)} \end{cases}$$