2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

donde a es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

2.2.1 **(1 punto)** El riesgo optimo se obtiene cuando se verifica la ecuación $A^2 - I = 2A$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar para qué valores de a se optimiza el riesgo.

2.2.2 **(1.5 puntos)** En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de a para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro a.

Solución:

2.2.1 ¿a? / $A^2 - I = 2A$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)^2+1 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & 1+(1-a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+1+1 & 2 \\ 2 & 1+a^2-2a+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2-2a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2-2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2-2a+1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I = 2A \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2-2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} a^2-2a+1 = 2-2a \\ a^2-2a+1 = 2+2a \end{cases} \quad\rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-1=0 \\ a^2-1=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad a^2 = 1; \quad a = \pm 1$$

Solución: se optimiza el riesgo cuando a = – 1 o a = 1.

2.2.2 ¿a? / existe A^{-1}.

A es invertible si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - 1 = 1 - a^2 - 1 = -a^2; \qquad a^2 = 0; \quad a = 0$$

$$Si \quad a \neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, A^{-1}$$

Cálculo:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$Y \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \frac{1}{-a^2}\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & -\frac{1-a}{a^2} \end{pmatrix}$$

Solución: la matriz de simulación admite inversa para a $\neq 0$ y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & -\frac{1-a}{a^2} \end{pmatrix}$.