3.1 Sean las rectas $r:\begin{cases}2x+y=a\\ z=1\end{cases}$ y $s:\begin{cases}-x+2y+2z=5\\ x+z=a\end{cases}$. Se pide:

3.1.1 **(1 punto)** Estudiar, según el valor de a, la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 **(1 punto)** Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P.

3.1.3 **(0.5 puntos)** Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P.

Solución:

3.1.1 Posición relativa de r y s en función de a.

Estudiemos el sistema formado por las dos rectas:

$\begin{cases}-x+2y+2z=5\\ x+z=a\\ 2x+y=a\\ z=1\end{cases}$ *la matriz ampliada de este sistema es:* $A'=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&2&5\\1&0&1&a\\2&1&0&a\\0&0&1&1\end{array}\right)$; *A es 4x3 su máximo rango será 3 y A´es 4x4 su máximo rango será 4.*

Calculemos el ran(A),

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A)\geq 2$$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A)=3 \quad\rightarrow\quad \text{las rectas se cruzan o se cortaran en un punto.}$$

Para que el sistema tenga solución, las dos rectas se corten en un punto, $|A'|=0$

$$|A'|=\begin{vmatrix}-1&2&2&5\\1&0&1&a\\2&1&0&a\\0&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\text{desarrollando}\\ \text{por la 4ª fila}\end{pmatrix}=-1\begin{vmatrix}-1&2&5\\1&0&a\\2&1&a\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1&2&2\\1&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}=-(5+4a+a-2a)+(2+4+1)=$$

$$=-5+3a+7=3a-2$$

$$3a-2=0;\quad 3a=2;\quad a=\frac{2}{3}$$

Solución: las rectas r y s se cortan en un punto cuando $a=\frac{2}{3}$ ***y se cruzan cuando*** $a\neq\frac{2}{3}$.

* * * *

Otra forma de resolver este apartado es:

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas. Obtengamos las ecuaciones paramétricas de las rectas.

$$r:\begin{cases}2x+y=a\\ z=1\end{cases} \rightarrow r:\begin{cases}y=a-2x\\ z=1\end{cases} \rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=a-2\lambda\\ z=1\end{cases} \rightarrow r:\begin{cases}P_r(0,a,1)\\ \vec{v}_r(-1,2,0)\end{cases}$$

$s:\begin{cases}-x+2y+2z=5\\ x+z=a\end{cases}$ *como* $\begin{vmatrix}-1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$ *despejamos x e y en función de z.*

$\begin{cases}-x+2y=5-2z\\ x=a-z\end{cases}$ *sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación:* $-(a-z)+2y=5-2z;$

$$-a+z+2y=5-2z;\quad 2y=5+a-2z-z;\quad 2y=5+a-3z;\quad y=\frac{5+a}{2}-\frac{3}{2}z \quad\rightarrow$$

$$s:\begin{cases} x = a-\mu \\ y = \dfrac{5+a}{2} - \dfrac{3}{2}\mu \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow \quad s:\begin{cases} P_s\left(a\,,\dfrac{5+a}{2}\,,0\right) \\ \vec{v}_s\left(-1\,,-\dfrac{3}{2}\,,1\right) \equiv \vec{v}_s(-2\,,-3\,,2) \end{cases}$$

Estudiamos la matriz $\left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \;\vdots\; \overrightarrow{P_rP_s}\right]$, *es decir:* $M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \vdots & a-0 \\ -2 & -3 & \vdots & \dfrac{5+a}{2}-a \\ 0 & 2 & \vdots & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \vdots & a \\ -2 & -3 & \vdots & \dfrac{5-a}{2} \\ 0 & 2 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$

Rango de M, { M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3-4 = -7 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) = 2$$

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M´ es 3 y ran(M´) $\geq$ *ran(M) = 2}.*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & -3 & \dfrac{5-a}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3-4a-2\,\frac{5-a}{2}+4 = 3-4a-5+a+4 = 2-3a\,. \quad 2-3a = 0; \quad 2 = 3a; \quad a = \frac{2}{3}.$$

Para $a = \dfrac{2}{3}$, $|M'| = 0 \quad \rightarrow \qquad$ *ran(M´) = 2 = ran(M) las rectas r y s se cortan en un punto.*

Para $a \neq \dfrac{2}{3}$, $|M'| \neq 0 \quad \rightarrow \qquad$ *ran(M´) = 3* $\neq$ *2= ran(M) las rectas r y s se cruzan.*

Solución: las rectas r y s se cortan en un punto cuando a = $\dfrac{2}{3}$ ***y se cruzan cuando a*** $\neq \dfrac{2}{3}$.

3.1.2 Calcular, si es posible, el valor de a para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte P.

Del apartado anterior, sabemos que las rectas se cortan en un punto para a **=** $\dfrac{2}{3}$.

Obtengamos el punto de corte resolviendo el sistema: $\begin{cases} -x+2y+2z = 5 \\ x+z = \dfrac{2}{3} \\ 2x+y = \dfrac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$ *sustituyendo el valor de z de la 4ª ecuación en las otras,*

$$\begin{cases} -x+2y+2\cdot 1 = 5 \\ x+1 = \dfrac{2}{3} \\ 2x+y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+2y = 5-2 \\ x = \dfrac{2}{3}-1 \\ 2x+y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+2y = 3 \\ x = \dfrac{-1}{3} \\ 2x+y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

sustituyendo el valor de x de la 2ª ecuación en las otras,

$$\begin{cases} -\dfrac{-1}{3}+2y = 3 \\ 2\,\dfrac{-1}{3}+y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}+2y = 3 \\ \dfrac{-2}{3}+y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y = 3-\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases} \rightarrow \quad y = \frac{4}{3}$$

Solución: para a = $\dfrac{2}{3}$ ***el punto de corte entre r y s es*** $\left(-\dfrac{1}{3}\,,\dfrac{4}{3}\,,1\right)$

3.1.3 Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y P.

$$d(P,O)=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}-0\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+(1-0)}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}+1}=\frac{\sqrt{26}}{3}$$

Solución: $d(P,O)=\dfrac{\sqrt{26}}{3}\ u.l.$