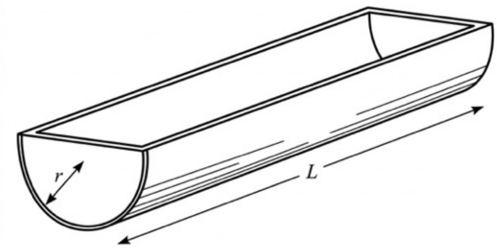
**4.2** Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio *r* medido en cm y la longitud del comedero es de *L* cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de $600\,\pi\, cm^2$.




Se pide:

4.2.1 **(1 punto)** Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio *r*.

4.2.2 **(1.5 puntos)** Encontrar el radio *r* y la longitud *L* que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.

*Solución:*

*4.2.1 Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio r.*

$$V_{comedero} = \frac{\pi\, r^2\, L}{2}$$

*Para tener la expresión anterior sólo en función de r debemos buscar una relación entre L y r.*

*El área total del comedero es:* $2\left(\frac{\pi\, r^2}{2}\right) + \frac{2\,\pi\, r\, L}{2} = \pi\, r^2 + \pi\, r\, L = \pi\left(r^2 + r\, L\right)$

*De los datos del problema el área total del comedero es* $600\,\pi\, cm^2$.

*Por lo tanto,* $\pi\left(r^2 + r\, L\right) = 600\,\pi;\quad r^2 + r\, L = 600;\quad r\, L = 600 - r^2;\quad L = \frac{600 - r^2}{r}$

*Finalmente,* $V_{comedero} = \frac{\pi\, r^2\left(\frac{600 - r^2}{r}\right)}{2} = \frac{\pi\, r\left(600 - r^2\right)}{2} = \frac{\pi}{2}\left(600\, r - r^3\right)$

*Como r es el radio del semicírculo, r > 0.*

***Por tanto,*** $V_{comedero} = \frac{\pi}{2}\left(600\, r - r^3\right) \quad r > 0.$

*4.1.2 Encontrar el radio r y la longitud L que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.*

*Debemos calcular el máximo de V,*

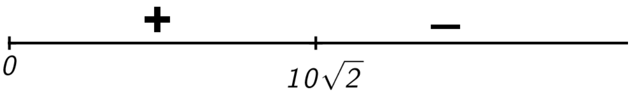
$V'_{comedero} = \frac{\pi}{2}\left(600 - 3\, r^2\right);\quad \frac{\pi}{2}\left(600 - 3\, r^2\right) = 0;\quad 600 - 3\, r^2 = 0;\quad 600 = 3\, r^2;\quad r^2 = \frac{600}{3};\quad r^2 = 200;$

$\left(como\ r > 0\right)\quad r = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \cong 14'1421$

*Calculemos el signo de* $V'_{comedero}$ *a la izquierda y derecha de* $r = 10\sqrt{2}$ ,

$$V'(1) = \frac{\pi}{2}\left(600 - 3 \cdot 1^2\right) = \frac{597}{2}\pi > 0$$

$$V'(20) = \frac{\pi}{2}\left(600 - 3 \cdot 20^2\right) = -300\,\pi < 0$$




*En* $r = 10\sqrt{2}$ *hay un máximo local. Como a la izquierda de* $r = 10\sqrt{2}$ *la función es creciente y a su derecha decreciente este máximo local es el absoluto de* $V_{comedero}$.

*Para* $r = 10\sqrt{2}$

$$L = \frac{600 - \left(10\sqrt{2}\right)^2}{10\sqrt{2}} = \frac{400}{10\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \cong 28'2843$$

$$V_{comedero} = \frac{\pi\left(10\sqrt{2}\right)^2 20\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \cdot 200 \cdot 20\sqrt{2}}{2} = 2000\sqrt{2}\,\pi \cong 8885'7659$$

***El volumen del comedero es máximo para*** $r = 10\sqrt{2}$ ***cm y*** $L = 20\sqrt{2}$ ***cm y este volumen es*** $2000\sqrt{2}\,\pi$ ***cm***$^3$**.**