

2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3m \end{pmatrix}.$$

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones $Ax = b$ en función del parámetro real m .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular, si existe, la solución para $m = 0$.

2.2.3 (0.75 puntos) Hallar la solución en el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

Solución:

2.2.1 Discutir el sistema de ecuaciones $Ax = b$ en función del parámetro real m .

La matriz ampliada del sistema será: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m+1 & 3 \\ 0 & 1 & m & 3 \\ m-1 & 0 & 5 & 3m \end{array} \right)$

A es 3×3 luego el máximo rango de A es 3. A' es 3×4 , el máximo rango de A' es 3. Empezamos estudiando el rango de A.

Rango de A en función de m.

En A el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2$

Estudiemos el menor de orden 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - m(m-1) - (m+1)(m-1) = 5 - m^2 + m - m^2 + 1 = -2m^2 + m + 6$$

$$-2m^2 + m + 6 = 0; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 7}{-4} = \begin{cases} m_1 = \frac{-1+7}{-4} = \frac{-3}{2} \\ m_2 = \frac{-1-7}{-4} = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto,

Si $m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$, $\text{ran}(A) = 3$ y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A') = 3$, por lo tanto $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible determinado

Si $m = \frac{-3}{2}$, $|A| = 0$ (antes hemos obtenido que $\text{ran}(A) \geq 2$), luego $\text{ran}(A) = 2$.

Para este valor de m, $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-3}{2}+1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ \frac{-3}{2}-1 & 0 & 5 & 3 \cdot \frac{-3}{2} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 3 \\ \frac{-5}{2} & 0 & 5 & \frac{-9}{2} \end{array} \right)$

En A', a partir del menor no nulo de orden 2 de A formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-9}{2} + \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = \frac{21}{2} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $m = 2$, $|A| = 0$ (antes hemos obtenido que $\text{ran}(A) \geq 2$), luego $\text{ran}(A) = 2$.

Para este valor de m , $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{array} \right)$

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 de A formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n^\circ$ de incógnitas \rightarrow Sistema compatible indeterminado.

Solución:

Si $m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 2$, sistema compatible determinado.

Si $m = \frac{-3}{2}$, sistema incompatible

Si $m = 2$, sistema compatible determinado.

2.2.2 Calcular, si existe, la solución para $m = 0$.

Si $m = 0$ ($m \neq \frac{-3}{2}$ y $m \neq 0$) \rightarrow el sistema es compatible y determinado, luego el sistema tiene solución.

Para $m = 0$, $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right)$ y $|A| = (-2m^2 + m + 6)_{m=0} = 6$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y = 3 \\ -x + 5z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{6} = \frac{15 + 15}{6} = 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{3 + 3}{6} = 1$$

Si $m = 0$, la solución es:
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

2.2.3 Hallar la solución en el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

El sistema tiene infinitas soluciones cuando es compatible indeterminado, es decir, cuando $m = 2$

El sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado 2.2.1). Es decir, el formado por la 1ª y 2ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y .

$$\begin{cases} x - y = 3 - 3z \\ y = 3 - 2z \end{cases}$$

La segunda ecuación nos da la solución de y , sustituyendo este valor en la 1ª obtendremos x :

$$x - (3 - 2z) = 3 - 2z \rightarrow x = 3 - 2z + 3 - 2z = 6 - 4z$$

$$\text{La solución es: } \begin{cases} x = 6 - 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$