

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos, si existen. Dibuja $f(x)$.

4.1.2 (1.5 puntos) Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ y el área comprendida entre ambas curvas.

Solución:

4.1.1 Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

La función $y = f(x)$ es un polinomio por lo que $\text{Dom } y = \mathcal{R}$.

$$y = x^4 - 7x^2 + 16$$

$$y' = 4x^3 - 14x; \quad y'' = 12x^2 - 14$$

Monotonía.

$$y' = 0; \quad 4x^3 - 14x = 0; \quad x(4x^2 - 14) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^2 - 14 = 0; \quad 4x^2 = 14; \quad x^2 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \cong \pm 1'87 \end{array} \right.$$

Debemos estudiar el signo de y' en los siguientes intervalos:

	x	y'
$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	-2	$4(-2)^3 - 14(-2) = -4$
$-1'87$	-1	$4(-1)^3 - 14(-1) = 10$
0	1	$4 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 = -10$
$\sqrt{\frac{7}{2}}$	2	$4 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2 = 4$
$1'87$		

Luego:

	x	y'
$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	-2	$4(-2)^3 - 14(-2) = -4$
$-1'87$	-1	$4(-1)^3 - 14(-1) = 10$
0	1	$4 \cdot 1^3 - 14 \cdot 1 = -10$
$\sqrt{\frac{7}{2}}$	2	$4 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2 = 4$
$1'87$		

Por tanto, $y = f(x)$ es

decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ y

creciente en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía se deduce que la función tiene un máximo relativo en $x = 0$ y mínimos relativos en $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. Comprobémoslo a partir de y'' .

x	$y'' = 12x^2 - 14$	$y = x^4 - 7x^2 + 16$
$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	$12\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - 14 = 28 > 0$ mínimo	$\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = \frac{15}{4}; \quad \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$
0	$12 \cdot 0^2 - 14 = -14 < 0$ máximo	$0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16; \quad (0, 16)$
$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$12\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 - 14 = 28 > 0$ mínimo	$\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^4 - 7\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2 + 16 = \frac{15}{4}; \quad \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$

Solución: $y = f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ y creciente en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, +\infty\right)$.

Tiene mínimo relativo en $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ y máximo relativo en $(0, 16)$.

Dibujar $f(x)$.

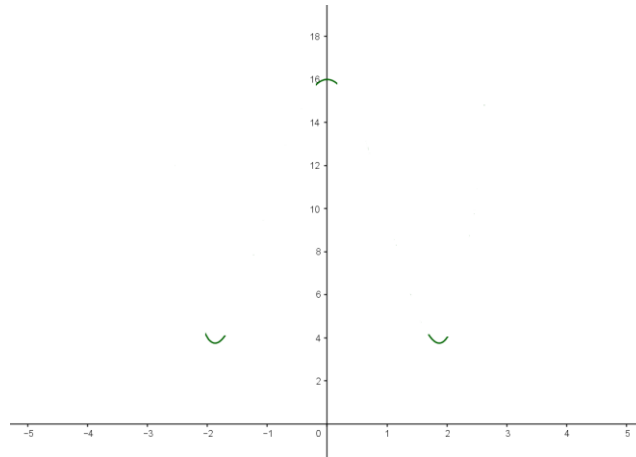
De los cálculos anteriores conocemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo (que es punto de corte con el eje OY) y mínimos de $f(x)$.

Mínimos: $(-1,87, 3,75)$ y $(1,87, 3,75)$. Máximo: $(0, 16)$

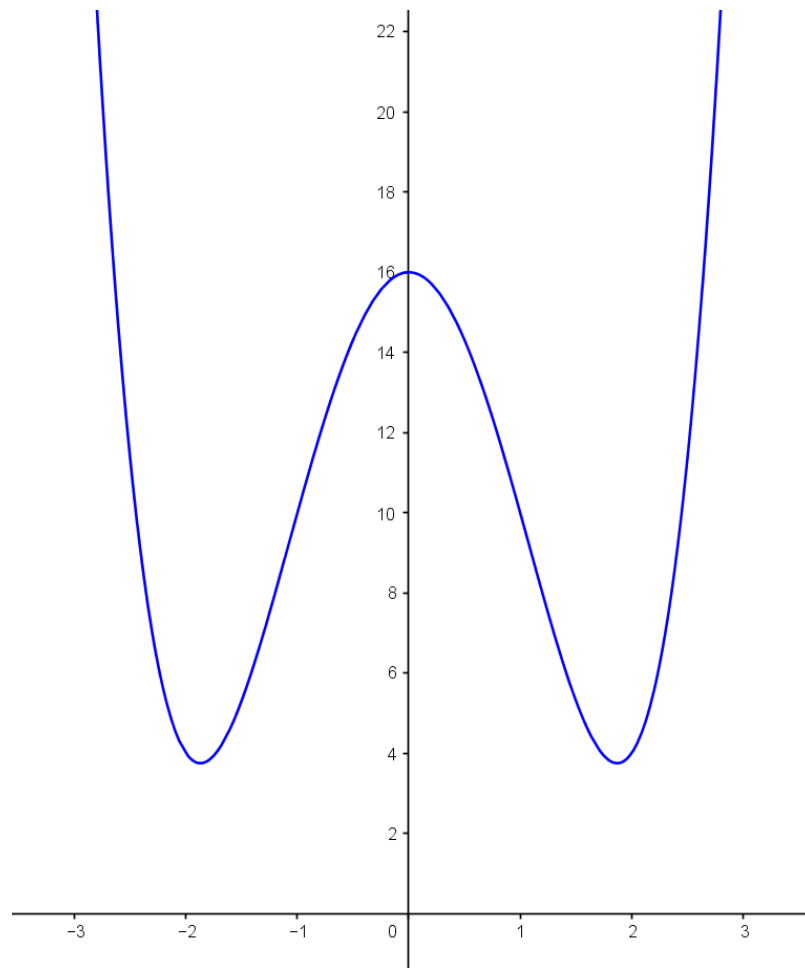
Calculemos, si existen, los puntos de corte con el eje OX .

$$x^4 - 7x^2 + 16 = 0; \quad x^2 = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{-15}}{2} \quad \text{no tiene soluciones}$$

Representando los datos conocidos:



Y la gráfica de $f(x)$ será:



4.1.2 Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ y el área comprendida entre ambas curvas.

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Los puntos de corte entre las dos curvas lo obtenemos a partir de la ecuación:

$x^4 - 7x^2 + 16 = x^2$; $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$; ecuación bicuadrada, hacemos el cambio $z = x^2$ y $z^2 = x^4$.

$$z^2 - 8z + 16 = 0; \quad z = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$$

Deshaciendo el cambio: $x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Para $x = -2$, $g(-2) = (-2)^2 = 4 \rightarrow (-2, 4)$

Para $x = 2$, $g(2) = (2)^2 = 4 \rightarrow (2, 4)$

Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ son $(-2, 4)$ y $(2, 4)$.

Como las dos curvas sólo tienen dos puntos de corte entre ellas, el área de la superficie encerrada entre ellas la obtenemos como sigue:

$$A = \left| \int_{-2}^2 [(x^4 - 7x^2 + 16) - (x^2)] dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (x^4 - 7x^2 + 16) dx \right|$$

Calculemos $\int_{-2}^2 (x^4 - 7x^2 + 16) dx$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 (x^4 - 7x^2 + 16) dx &= \left[\frac{x^5}{5} - 8 \frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 = \left(\frac{2^5}{5} - 8 \frac{2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-2)^5}{5} - 8 \frac{(-2)^3}{3} + 16 \cdot (-2) \right) = \\ &= \frac{256}{5} - \frac{-256}{5} = \frac{512}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } A = \left| \frac{512}{5} \right| = \frac{512}{5} \cong 34'1313$$

El área pedida mide $\frac{512}{5}$ u.a.