4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 **(1.25 puntos)** Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo [0,12].

4.2.2 **(1 punto)** Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 **(0.25 puntos)** La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

Solución:

4.2.1) Representar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ *en el intervalo [0, 12].*

Dom f(x) = $\Re$ *(para cualquier valor de x se pueden realizar los cálculos indicados)*

Puntos de corte con los ejes coordenados, (0 , 3)

$$x = 0, \quad f(0) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 = \cos(0) + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$f(x) = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 = 0; \quad \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) = -2 \quad \text{sin solución} \quad (-1 \le \cos(x) \le 1)$$

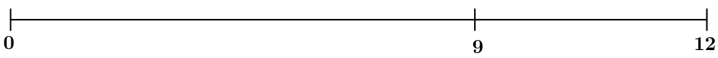
Monotonía,

$$f'(x) = -\frac{\pi}{9} sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)$$

$$-\frac{\pi}{9} sen\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0; \quad sen\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} \frac{\pi x}{9} = 0 + 2k\pi \\ \frac{\pi x}{9} = \pi + 2k\pi \end{array} \right. \quad k \in Z \to \quad \frac{\pi x}{9} = k\pi; \quad \pi x = 9k\pi; \quad x = 9k$$

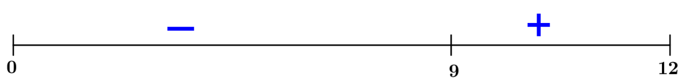
Como x debe estar en el intervalo [0 , 12], si k = 0, x = 9 . 0 = 0; si k = 1, x = 9 . 1 = 9, si k = 2, x = 9 . 2 = 18 $\notin [0,12]$.

Obtengamos la monotonía de f(x), debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:



x	$f'(x)$
3	$-\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi \cdot 3}{9}\right) < 0$
10	$-\frac{\pi}{9}\sin\left(\frac{\pi \cdot 10}{9}\right) > 0$

El signo de f´(x) es:



f(x) es decreciente en (0 , 9) y creciente en (9 , 12); en x = 9 habrá un mínimo.

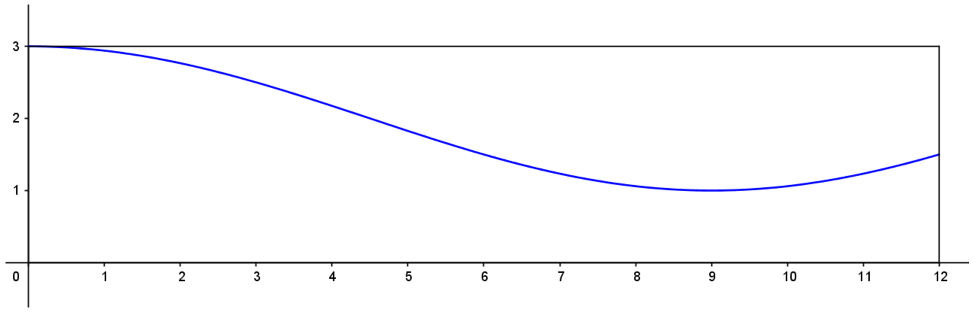
Calculemos el mínimo y los valores de la función en los extremos. Ya hemos obtenido (0 , 3)

$$x = 9, \quad f(9) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 9}{9}\right) + 2 = \cos(\pi) + 2 = -1 + 2 = 1, \quad (\ 9\ ,\ 1\ )\ \text{mínimo}$$

$$x = 12, \quad f(0) = \cos\left(\frac{\pi \cdot 12}{9}\right) + 2 = \cos\left(\frac{\pi \cdot 4}{3}\right) + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} = 1´5, \quad (\ 12\ ,\ 1´5\ )$$

En (0 , 3) tiene un máximo absoluto y en (9 , 1) un mínimo absoluto.

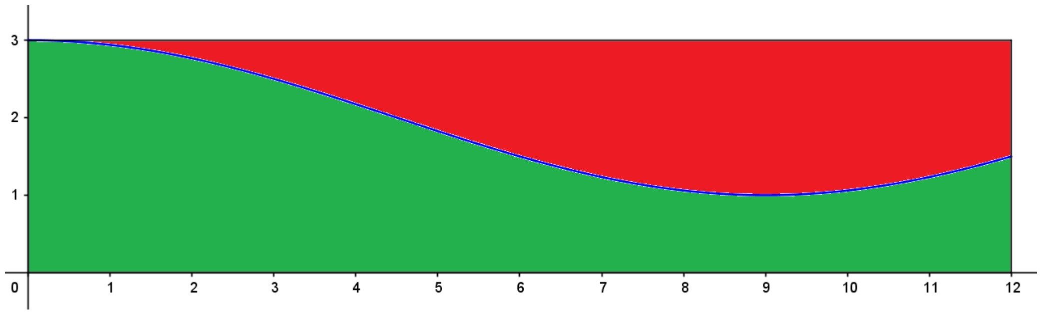
La representación gráfica es:



4.2.2) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

El decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo.

La pared queda:



Área de la pared (rectángulo) $A_R = 12 \,.\, 3 = 36\ m^2$

Área pintada de verde:

la obtenemos mediante la siguiente integral,

$$\int_0^{12} \left[\cos\left(\frac{\pi\, x}{9}\right) + 2\right] dx = \left[\frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\, x}{9}\right) + 2x\right]_0^{12} = \left[\frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{\pi \cdot 12}{9}\right) + 2 \cdot 12\right] - \left[\frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{9}\right) + 2 \cdot 0\right] =$$

$$= \left[\frac{9}{\pi}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + 24\right] - 0 = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \cong 21´5190$$

Área pintada de rojo: 36 – 21´5190 = 14´4810

Solución: el área de la pared pintada de verde mide 21´5190 m ^{2} ***y la pintada de rojo 14´4810 m*** ^{2}**.**

4.2.3) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

Necesitamos $\dfrac{21´5190}{3} = 7´173$

Solución: se necesitan, como mínimo, 8 botes de pintura verde.