EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dados los planos π : 5 x – y – z = 0 , σ : x + y – z = 0 y el punto P (9, 4, -1), determinar:

a) La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π y a σ (*1,5 puntos*).
b) El punto simétrico de P respecto de la recta r, intersección de los planos π y σ (*1,8 puntos*).

Solución:

a) *Obtenemos los vectores perpendiculares a los planos dados,*

$\vec{u}\,(5,-1,-1)$ *luego* $\vec{u} \perp \pi$; $\vec{v}\,(1,1,-1)$ *luego* $\vec{v} \perp \sigma$

Para obtener un vector perpendicular a los planos π *y* σ *calculamos el producto vectorial de los vectores anteriores,*

$$\vec{u}\times\vec{v} \perp \begin{cases}\vec{u}\\ \vec{v}\end{cases} \Rightarrow \quad \vec{u}\times\vec{v} \perp \begin{cases}\pi\\ \sigma\end{cases}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = \vec{i}\,(1+1) - \vec{j}\,(-5+1) + \vec{k}\,(5+1) =$$

$= (2, 4, 6)$

El plano de ecuación $2x + 4y + 6z + D = 0$ *será perpendicular a los planos* π *y* σ*, como debe pasar por el punto (9, 4, -1),*

$2 \cdot 9 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + D = 0$

$18 + 16 - 6 + D = 0$

$D = -28$

El plano pedido es $2x + 4y + 6z - 28 = 0$*, ecuación que podemos simplificar por 2,*

$x + 2y + 3z - 14 = 0$

La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π ***y a*** σ ***es:*** $\mathbf{x + 2y + 3z - 14 = 0}$

b) *Para resolver este apartado seguiremos el siguiente proceso:*

1º) Calculo del plano que contiene a P y es $\perp\ a\ r \equiv \psi$

2º) Calculo del punto de corte entre r y $\psi \equiv M$

3º) Calculo del simétrico de P, P', sabiendo que M es el punto medio entre P y P'.

1º) El vector director de r será perpendicular a ψ

Conocemos la recta r como intersección de dos planos, calculemos su ecuación paramétrica,

$$r:\begin{cases}5x - y - z = 0\\ x + y - z = 0\end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 5 + 1 = 6 \neq 0 \quad \begin{cases}5x - y = z\\ x + y = z\end{cases}$

$$sumando: \quad 6x = 2z \quad \to \quad x = \frac{z}{3}$$

$$susttituyendo \quad en \quad la \quad 2^a \quad ecuación: \quad \frac{z}{3} + y = z \to y = z - \frac{z}{3} = \frac{2z}{3}$$

La ecuación parámetrica de r:
$$\begin{cases}x = \frac{1}{3}\lambda\\ y = \frac{2}{3}\lambda \quad \lambda \in \Re\\ z = \lambda\end{cases}$$

y el vector director de r: $\vec{v_r} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ *o bien* $\vec{v_r} = (1,2,3)$

La ecuación del plano ψ será $x + 2y + 3z + D = 0$, como P está en el plano:
$9 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + D = 0$
$9 + 8 - 3 + D = 0$
$d = -14$
La ecuación del plano ψ es $x + 2y + 3z - 14 = 0$

2º) El punto de corte entre la recta r y el plano ψ lo encontramos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de r y ψ,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5z - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \quad \textit{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 10 - 1 - 1 - 15 + 2 = -28 \neq 0 \quad \textit{es un S.C.D.}$$

lo resolvemos por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14(-1-1)}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-14\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-14(-1+5)}{-28} = \frac{-56}{-28} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{-28} == \frac{14\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14(-1-5)}{-28} = \frac{14(-6)}{-28} = 3$$

Por lo tanto M (1, 2, 3)

3º) Por ser M el punto medio del segmento P P’, se cumple, $M = \frac{P + P'}{2}$

luego P’ = 2 M – P = 2 (1, 2, 3) – (9, 4, -1) = (2, 4, 6) – (9, 4, -1) = (-7, 0, 7)

Finalmente, ***el punto simétrico de P respecto de la recta r, intersección de los planos π y σ, es (-7, 0, 7)***